Punkte
30 (32)

Probeprüfung Mathematik Qualifikationskurs MAT001

1. *Teilbarkeitslehre (6 Punkte)*

   a. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1024 und 72.

$$\begin{array}{r|l} 1024 & 2 \\ 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 1024 = 2^{10} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 72 = 2^3 3^2$$

$$ggT(1024, 72) = 2^3 = \underline{\underline{8}}$$

   b. Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 36 und 42.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \right)$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & \boxed{2} \\ 18 & \boxed{2} \\ 9 & \boxed{3} \\ 3 & \boxed{3} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 ✓ \\ 21 & 3 ✓ \\ 7 & \boxed{7} \\ 1 & \end{array}$$

$$kgV(36, 42) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 =$$
$$= 36 \cdot 7 = \underline{\underline{252}}$$

2. *Lösen von Gleichungen (6 Punkte)*

   a. Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters $b \in \mathbb{R}$ die quadratische Gleichung $\boxed{\textbf{keine}}$ Lösung hat.

$$9\,x^2 - b \cdot x + 64 = 0$$

a, b, c

$D < 0$

$b^2 - 4ac < 0$

$b^2 - 4 \cdot 9 \cdot 64 < 0 \quad | +2304$

$b^2 < 2304 \quad | \pm\sqrt{}$

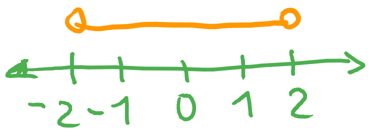
$-48 < b < 48$

$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{}$

$x = 2$

$x = -2$

$b^2 < 4 \quad | \pm\sqrt{}$



   b. Lösen Sie folgende Gleichung für $x \in \mathbb{R}$ und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$(3x-2)^2 - (2+5x)^2 + 8x = -8x \cdot (1+2x) - 15x - 1$$

$9x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 4 - (4 + 2 \cdot 2 \cdot 5x + 25x^2) + 8x = -8x - 16x^2 - 15x - 1$

$\cancel{9x^2} - 12x + 4 - 4 - 20x - \cancel{25}x^2 + 8x = -8x - \cancel{16x^2} - 15x - 1$

$-24x = -23x - 1 \quad | +23x$

$-x = -1 \quad | \cdot (-1)$

$x = 1$

$L = \{1\}$

3. *Funktionen (6 Punkte)*

a. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktion $h(x)$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$h(x) = \frac{5}{x^2 - 9}$$

Nenner darf nicht Null sein

$x^2 - 9 \neq 0$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \quad | \pm\sqrt{}$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

$D = \mathbb{R} \setminus \{3; -3\}$

$\left(g(x) = \sqrt{2x+1} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\} \quad 2x+1 \geq 0 \quad 2x \geq -1 \quad x \geq -\frac{1}{2} \right)$

b. Bestimmen Sie die Gleichung der linearen Funktion $f(x)$, die durch die Punkte $A = (-1/5)$ und $B = (3/4)$ verläuft **und** stellen Sie die Funktion graphisch dar.

$y = f(x)$

$P(x / f(x))$

$f(x) = k \cdot x + d$

A: $5 = k \cdot (-1) + d$

B: $4 = k \cdot 3 + d$ $\quad] -$

$1 = -4k$

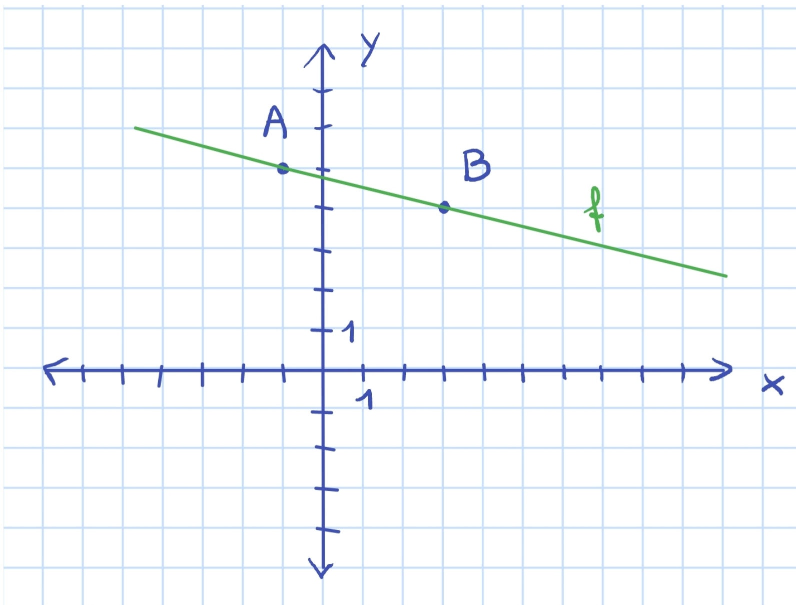
$k = -\frac{1}{4}$

ODER: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4}$

$4 = -\frac{1}{4} \cdot 3 + d \quad / + \frac{3}{4}$

$d = \frac{19}{4} = 4{,}75$

$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}x + 4{,}75}}$



4. Differenzialrechnung (6 Punkte)

a. Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$ *und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich*.

EINSCHUB:

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = c$

$f'(x) = 0$

Bsp.

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f(x) = 7$

$f'(x) = 0$

wenn $f''(x)$ gesucht:

$[(x-2)^2]' = 2 \cdot (x-2)^1 \cdot 1$

Kettenregel

$$f(x) = \frac{\overbrace{3x^2 + 7x}^{f}}{\underbrace{x - 2}_{g}}$$

$1 \cdot x$

QUOTIENTENREGEL

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3 \cdot 2x^1 + 7) \cdot (x-2) - (3x^2 + 7x) \cdot 1}{(x-2)^2}$$

ausquadrieren nicht notwendig

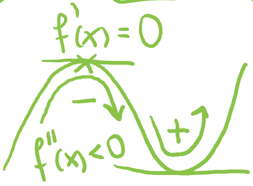
$$f'(x) = \frac{(6x+7) \cdot (x-2) - (3x^2 + 7x)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 7x - 12x - 14 - 3x^2 - 7x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12x - 14}{(x-2)^2}$$

b. Berechnen Sie die Steigung der Funktion $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$.

1. Ableitung



f'(x)=0

f''(x)>0

f'' … Krümmung

$$g(x) = (2x + 1)^3$$

Kettenregel

$$g'(x) = \underbrace{3 \cdot (2x+1)^2}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{2}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$g'(x) = 6 \cdot (2x+1)^2$$

$$g'(2) = 6 \cdot (2 \cdot 2 + 1)^2$$

$$g'(2) = 6 \cdot (5)^2 = 6 \cdot 25 = \underline{\underline{150}}$$

5. *Gleichungssysteme und Matrizen (6 Punkte)*

a. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Eliminationsmethode und geben Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an.

$x \in \mathbb{R}$
$y \in \mathbb{R}$

$$3x + 4y = 9$$
$$-4x + y = -2{,}5 \quad | \cdot (-4)$$

$$3x + 4y = 9$$
$$16x - 4y = 10 \quad] +$$

$$19x = 19$$
$$x = 1$$

$$3 \cdot 1 + 4y = 9 \quad | -3$$
$$4y = 6$$
$$y = \frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{4}\,2}$$
$$y = 1{,}5$$

$$L = \{(1; 1{,}5)\}$$

Lösung ist ein Zahlenpaar!

b. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie: $(A + B)^T \cdot C$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A+B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot (-2)$
$1 \cdot 1$
$(-1)(-3)$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{0} & -3 & 3 \\ -13 & 6 & 26 \\ -8 & -1 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

BONUS: Stefan hat 250 Euro gespart und legt das Geld auf ein Sparbuch mit einer Verzinsung von 2,25%. Er lässt das Geld fünf Jahre auf dem Sparbuch liegen. Wieviel Euro kann er nach fünf Jahren abheben? *(2 Punkte)*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

K_n ... Kapital nach n Jahren

$$K_5 = 250 \cdot \left(1 + \frac{2{,}25}{100}\right)^5$$

$$K_5 = 279{,}42\ €$$

A: Stefan kann 279,42 € abheben.