Probeprüfung Mathematik Qualifikationskurs MAT001

Bei allen Aufgaben sind die Lösungen nachvollziehbar und mit **allen** Rechenschritten anzugeben.

1. *Teilbarkeitslehre (3 Punkte)*

   a. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 1024 und 72.

1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$1024 = 2^{10}$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

2^{10}

$ggT(1024, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

$kgV(1024, 72) = 1024 \cdot 3^2 = 9216$

ODER

$= 2^{10} \cdot 3^2 = 9216$

2. *Lösen von Gleichungen (9 Punkte)*

   a. Geben Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ an.

$$5x^2 + 5x - 30 = 0 \quad | :5$$

große Lösungsformel

$a = 5$

$b = 5$

$c = -30$

$L = \{2; -3\}$

(Lösungsmenge sind 2 Zahlen!)

$x^2 + x - 6 = 0$

kleine Lösungsformel

$p = 1$

$q = -6$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} =$

$= -\frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} + 6}}_{\frac{5}{2}}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -3$

eine Lösung
D = 0
zwei Lösungen
D > 0

b. Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters $b \in R$ die quadratische Gleichung **keine** Lösung hat.

$$9 \cdot x^2 - b \cdot x + 64 = 0$$

a, c

(Anzahl der Lösungen ist abhängig von dem Ausdruck, der unter der Wurzel steht = Diskriminante D)

$D < 0$

$b^2 - 4ac < 0$

$b^2 - 4 \cdot 9 \cdot 64 < 0$

$b^2 - 2304 < 0$

$b^2 < 2304 \quad | \sqrt{\ }$

b liegt zwischen −48 und +48

$-48 < b < 48$

Bsp:

$x^2 < 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$

−2 −1 0 1 2

$-2 < x < 2$

$|x| < 2$

c. Lösen Sie folgende Gleichung für $x \in R$ und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$(3x-2)^2 - (2+5x)^2 + 8x = -8x \cdot (1+2x) - 15x - 1$$

bin. Formel

$9x^2 - 12x + 4 - (4 + 20x + 25x^2) + 8x = -8x - 16x^2 - 15x - 1$

$9x^2 - 12x + 4 - 4 - 20x - 25x^2 + 8x = -8x - 16x^2 - 15x - 1$

$-24x = -23x - 1 \quad | + 23x$

$-x = -1$

$x = 1$

$L = \{1\}$

SONDERFÄLLE:

x fallen weg

$0 = 4$ f.A.
$L = \{\ \}$
keine Lösung

$0 = 0$ w.A
$L = G = R$
∞ viele Lösungen

3. *Funktionen (6 Punkte)*

a. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktion $h(x)$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$h(x)=\frac{3x+2}{\underbrace{x\cdot(x^2-4)}}$$

Nenner darf nicht Null werden

$$x\cdot\underbrace{(x^2-4)}=0$$

$$x=0$$

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4 \quad | \pm\sqrt{\ }$$

$$x=\pm 2$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{0;+2;-2\}$$

b. Bestimmen Sie die Gleichung der linearen Funktion $f(x)$, die durch die Punkte $A=(-1/5)$ und $B=(3/4)$ verläuft **und** stellen Sie die Funktion graphisch dar.

x y   x y

$$\underbrace{f(x)}_{y}=k\cdot x+d$$

k ↓ Steigung

d ↳ Schnittpunkt mit der y-Achse

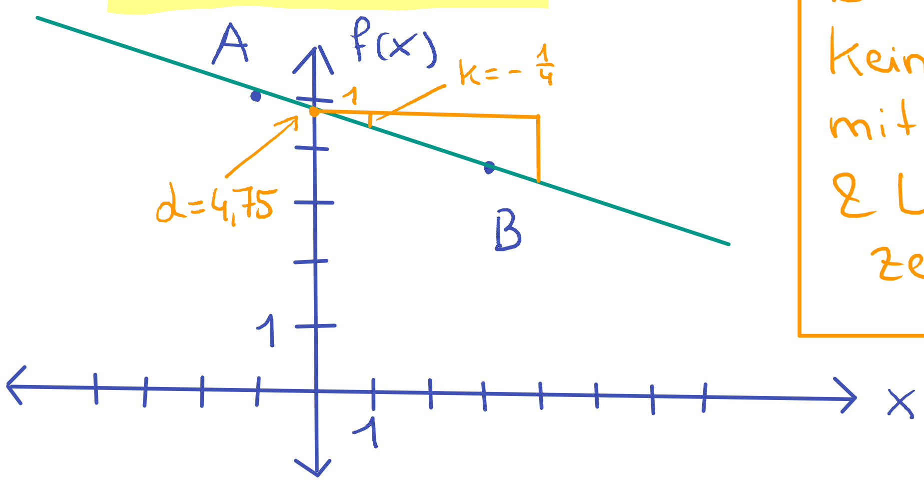
1) $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-5}{3-(-1)}=-\frac{1}{4}$

2) B einsetzen:

$$4=-\frac{1}{4}\cdot 3+d \quad / +\frac{3}{4}$$

$$d=\frac{19}{4}=4{,}75$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}x+4{,}75$$



BITTE
Keine Skizze!
mit Bleistift
& Lineal
zeichnen!

4. *Differenzialrechnung (6 Punkte)*

$f'(x)$ .... Steigung
$f''(x)$ .... Krümmung

a. Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$ und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich

Nenner wird nie vereinfacht

$$f(x)=\frac{\boxed{3x^3+7x}}{\boxed{x-5}}$$

f g

QUOTIENTENREGEL

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$f'(x) = \frac{(9x^2+7)\cdot(x-5) - (3x^3+7x)\cdot 1}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9x^3+7x-45x^2-35-3x^3-7x}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3-45x^2-35}{(x-5)^2}$$

für 2. Ableitung sind Kettenregel und Quotientenregel notwendig!

b. Berechnen Sie die Steigung der Funktion $g(x)$ an der Stelle $x_0=0$.

$$\boxed{\frac{x}{3} = \frac{1}{3}\cdot x}$$

$g'(0) = ?$

$$g(x)=\frac{(x-2)^2}{2}$$

keine Quotientenregel notwendig, da keine Variable im Nenner steht

$$g(x) = \frac{1}{2}\cdot(x-2)^2$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{2\cdot(x-2)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot\underbrace{1}_{\text{innere Abl.}}$$

$$g'(x) = x-2$$

$$g'(0) = 0-2$$

$$g'(0) = -2$$

Bsp: !

$$f(x) = \frac{3}{x^2} = 3\cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 3\cdot(-2)\cdot x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{x^3}$$

5. *Gleichungssysteme und Matrizen (6 Punkte)*

   a. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Eliminationsmethode und geben Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an.

$$\begin{aligned} I: 17x - 5y &= 7 \quad | \cdot 6 \\ II: 5x - 6y &= -7 \quad | \cdot (-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I: 102x - 30y &= 42 \\ II: -25x + 30y &= 35 \end{aligned} \quad \Big] +$$

$$\begin{aligned} 77x &= 77 \quad | : 77 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in } II: 5 \cdot 1 - 6y &= -7 \quad | -5 \\ -6y &= -12 \quad | : (-6) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{L = \{(1|2)\}}_{\text{1 Lösung}}$$

$\Downarrow$

1 Zahlenpaar

   b. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3×3

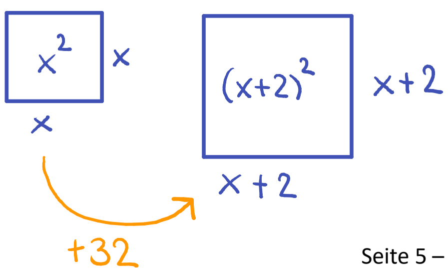
Berechnen Sie: $(A+B) \cdot C^T$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 14 & -3 \\ -7 & 17 & 6 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(A+B) \cdot C^T = \begin{pmatrix} -4 & 14 & -3 \\ -7 & 17 & 6 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

BONUS: Verlängert man die Seiten eines Quadrats um 2 cm, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 32 cm². Wie groß war der ursprüngliche Flächeninhalt? *(2 Punkte)*



$$\begin{aligned} x^2 + 32 &= (x+2)^2 \\ \cancel{x^2} + 32 &= \cancel{x^2} + 4x + 4 \quad | -4 \\ 28 &= 4x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$A = 49\ \text{cm}^2$

$\boxed{\text{www. geogebra/classic}}$

ZUR ÜBERPRÜFUNG der Ergebnisse

Matrizen mit GEOGEBRA

$A = \{\underbrace{\{1,-1,0\}}_{\text{Zeile 1}}, \underbrace{\{1,3,2\}}_{\text{Zeile 2}}, \underbrace{\{0,4,1\}}_{\text{Zeile 3}}\}$ ↵

$B = \ldots$

$C = \ldots$

$A + B$ ↵

Transponiere (C) ↵

$\boxed{*}$

$m_1 \cdot m_2$ ↵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

m1 = A + B

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

m2 = Transponiere(C)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

m3 = m1 m2

$$= \begin{pmatrix} -4 & 14 & -3 \\ -7 & 17 & 6 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$