Probeprüfung Mathematik Qualifikationskurs MAT001

Bei allen Aufgaben sind die Lösungen nachvollziehbar und mit allen Rechenschritten anzugeben. Die Aufgaben dürfen nicht ausschließlich mit KI-Tools gelöst werden, eine Kontrolle der Lösungen mit Hilfe von Technologieeinsatz ist erlaubt.

1. *Grundlagen und Teilbarkeitslehre (6 Punkte)*

a. Ein Flachbildfernseher kostet 499 €. Bei Barzahlung erhält man 2% Skonto. Wie viel muss dann für das Gerät bezahlt werden?

↓ 2%

98% von 499 ⇒ $y = 0{,}98 \cdot 499$

$y = 489{,}02$

A: Man muss 489,02 € zahlen.

b. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 1024 und 72.

1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$2^{10} = 1024$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$2^3 \cdot 3^2 = 72$

ggT(1024,72) = $2^3 = 8$

kgV(1024,72) = $2^{10} \cdot 3^2 =$

$= 9216$

2. *Lösen von Gleichungen (6 Punkte)*

a. Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters $b \in \mathbb{R}$ die quadratische Gleichung **keine** Lösung hat.

$9 \cdot x^2 - b \cdot x + 64 = 0$ (a, c)

$b^2 - 4 \cdot 9 \cdot 64 < 0$

$b^2 < 2304 \quad | \pm \sqrt{\ }$

$-48 < b < 48$

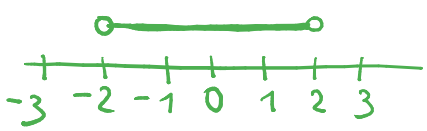
keine Lösung: $D < 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac$

(eine Lösung: $D = 0$
2 Lösungen: $D > 0$)

$x^2 < 4$



$|x| < 2$

$-2 < x < 2$

b. Lösen Sie folgende Gleichung für $x \in R$ und geben Sie die Lösungsmenge an.

Grundmenge

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(3x-2)^2 - (2+5x)^2 + 8x = -8x \cdot (1+2x) - 15x - 1$

$9x^2 - 12x + 4 - (4 + 20x + 25x^2) + 8x = -8x - 16x^2 - 15x - 1$

$9x^2 - 12x + 4 - 4 - 20x - 25x^2 + 8x = -16x^2 - 23x - 1$

$-24x = -23x - 1 \quad | + 23x$

$-x = -1 \quad | \cdot (-1)$

$x = 1$ $\qquad L = \{1\}$

SONDERFÄLLE:

x fallen weg

$0 = 4$ f.A
$L = \{\}$
keine Lösung

$0 = 0$ w.A
$L = \mathbb{R}$ L ist Grundmenge, also $\mathbb{R}$
∞ viele Lösungen

3. Funktionen (6 Punkte)

a. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktion $h(x)$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$h(x)=\sqrt{(3x-2)}$$

≥ 0

$3x-2 \geq 0$

$3x \geq 2$

$x \geq \frac{2}{3}$

ODER

$D=\left[\frac{2}{3};\infty\right)$

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\}$

(ANMERKUNG

$f(x)=\frac{Z}{N}$

↳ $N \neq 0$ $D=\mathbb{R}\setminus\{\dots\}$)

b. Bestimmen Sie die Gleichung der linearen Funktion $f(x)$, die durch die Punkte $A=(-1/5)$ und $B=(3/4)$ verläuft **und** stellen Sie die Funktion graphisch dar.

x_1 y_1 x_2 y_2

KEINE SKIZZE!

↳ Lineal und Bleistift

Variante 1:

1) $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-5}{3-(-1)}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$

2) $y=k\cdot x+d$

$4=-\frac{1}{4}\cdot 3+d \quad | +\frac{3}{4}$

$\frac{19}{4}=d$

$f: y=-\frac{1}{4}\cdot x+\frac{19}{4}$

Variante 2: Punkte in Glg. einsetzen

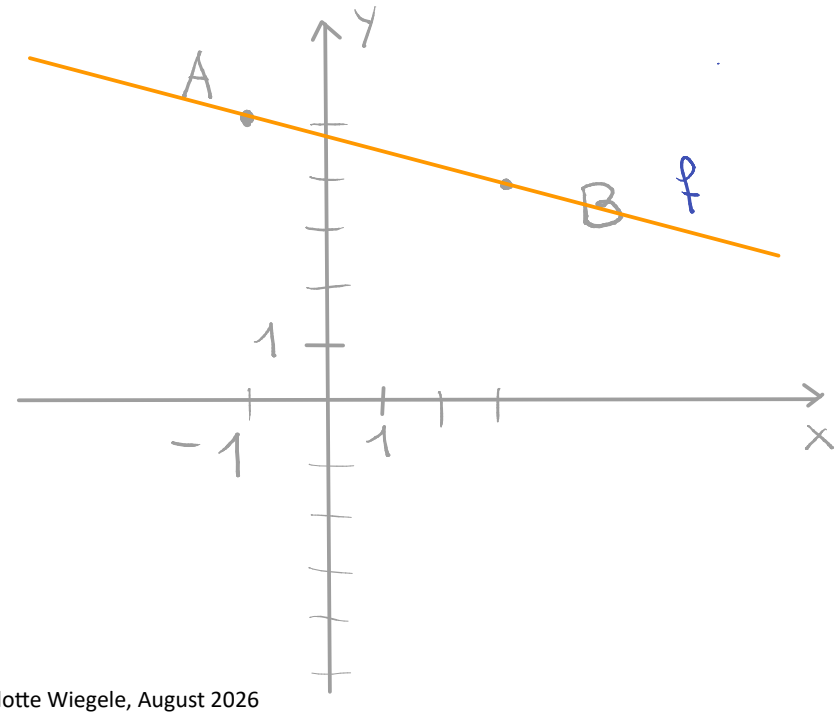
I: $5=k\cdot(-1)+d$

II: $4=k\cdot 3+d$ ⊖

$1=-4k \quad |:(-4)$

$k=-\frac{1}{4}$

2) wie bei Variante 1



4. Differenzialrechnung (6 Punkte)

a. Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$ und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich

$$f(x)=\frac{3x^3+7x}{x-5}$$ (f / g)

PRODUKTREGEL

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

QUOTIENTENREGEL

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$f'(x) = \frac{(9x^2+7)\cdot(x-5) - (3x^3+7x)\cdot 1}{(x-5)^2}$$

muss nicht ausgerechnet werden!

$$f'(x) = \frac{9x^3-45x^2+7x-35-3x^3-7x}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3-45x^2-35}{(x-5)^2}$$

b. Berechnen Sie die Steigung der Funktion $g(x)$ an der Stelle $x_0=8$. ⇒ $g'(8) = ?$

$$g(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

Anmerkung:

$$\sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$g'(8) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$$g'(8) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

5. Gleichungssysteme und Matrizen (6 Punkte)

a. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Eliminationsmethode und geben Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an.

$x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$

$I: 17x - 5y = 7 \quad | \cdot 6$
$II: 5x - 6y = -7 \quad | \cdot (-5)$

$I: 102x - 30y = 42$
$II: -25x + 30y = 35$ $\Big] +$

$77x = 77 \quad | : 77$
$x = 1$

in II: $5 \cdot 1 - 6y = -7 \quad | -5$
$-6y = -12 \quad | : (-6)$
$y = 2$

$L = \{(1|2)\}$
1 Lösung (Zahlenpaar)

b. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

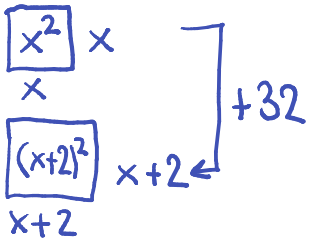
$(3 \times 3) \cdot (3 \times 3)$

Berechnen Sie: $(A+B) \cdot C^T$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B) \cdot C^T = \begin{pmatrix} -4 & 14 & -3 \\ -7 & 17 & 6 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

BONUS: Verlängert man die Seiten eines Quadrats um 2 cm, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 32 cm^2 . Wie groß war der ursprüngliche Flächeninhalt? *(2 Punkte)*



$x^2 + 32 = (x+2)^2$
$x^2 + 32 = x^2 + 4x + 4 \quad | -4$
$28 = 4x \quad | : 4$
$x = 7 \Rightarrow A = 49\ cm^2$

Matrizen mit GeoGebra

www.geogebra.org/classic

Eingabe: $A = \{\{1,-1,0\},\{1,3,2\},\{0,4,1\}\}$

$B = \ldots$

$C = \ldots$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

m1 = A + B

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

m2 = Transponiere(C)

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

m3 = m1 m2

$= \begin{pmatrix} -4 & 14 & -3 \\ -7 & 17 & 6 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

$m_1 \cdot m_2$

GOOD LUCK! 🍀