53

Welche Werte müssen p, q, r und s in den beiden Matrizen **A** und **B** haben, damit **A** und **B** gleich sind?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & p-1 \\ 2p & q \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} p & 2r \\ q+1 & p+s \end{pmatrix}$$

Damit **A** und **B** gleich sind, müssen die Elemente jeweils gleich sein, also:

$$\begin{pmatrix} 3 = p & p-1 = 2r \\ 2p = q+1 & q = p+s \end{pmatrix}$$

Damit steht einmal fest, dass $\boxed{p = 3}$.

Das können wir jetzt einsetzen und erhalten zum Beispiel im Element rechts oben:

$$3 - 1 = 2r$$

und somit: $\boxed{r = 1}$

Weiters:

$$2 \cdot 3 = q + 1$$

Daher ist $\boxed{q = 5}$

Und schließlich:

$$5 = 3 + s$$

und $\boxed{s = 2}$

Zur Überprüfung setzen wir noch in **A** und **B** ein:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

54

Gegeben ist die Matrix **A**. Geben Sie $\mathbf{A}^2$ an.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

		1	$-0,5$
	☺	2	-1
1	$-0,5$	$1 - 1 = 0$	$-0,5 + 0,5 = 0$
2	-1	$2 - 2 = 0$	$-1 + 1 = 0$

Wir erhalten also die Nullmatrix $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

55

Welche der drei Matrizen **B**,**C** oder **D** ist die inverse Matrix von **A**?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Dafür müssen wir überprüfen, welches der Matrizenprodukte mit **A** die Einheitsmatrix ergibt:

		3	-5
	☺	-1	2
2	1	5	-8
5	3	12	-19

		3	-1
	☺	-5	2
2	1	1	0
5	3	0	1

		-2	-1
	☺	-5	3
2	1	-9	1
5	3	-25	4

Die Inverse zu **A** ist somit die Matrix **C**.

56

Was müssen Sie für a einsetzen, damit **S** symmetrisch ist?

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} a & a^2 - 1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$$

Vergleichen wir zunächst einmal die Elemente a_{12} und a_{21} und setzen sie gleich, ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$a^2 - 1 = a + 1$$
$$a^2 - a - 2 = 0$$

die wir leicht auflösen können:

$$_1a_2 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$
$$a_1 = -1$$
$$a_2 = 2$$

Setzen wir zunächst $a_1 = -1$ ein:

$$\begin{pmatrix} -1 & (-1)^2 - 1 & -3 \\ (-1) + 1 & 2 & (-1)^2 + 4 \\ -3 & 4(-1) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist aber nicht symmetrisch, also ist $a = -1$ offenbar nicht die gesuchte Lösung.

Für $a_2 = 2$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2^2 - 1 & -3 \\ 2 + 1 & 2 & 2^2 + 4 \\ -3 & 4 \cdot 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 8 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

und das ergibt tatsächlich eine symmetrische Matrix.
Die Lösung lautet also: $\boxed{a = 2}$

57
Lösen Sie das gegebene Gleichungssystem mit Hilfe der Matrizenrechnung

$$x + 3y + 3z = 1$$
$$x + 3y + 4z = 2$$
$$x + 4y + 3z = 1$$

wobei Sie folgende Information verwenden können:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können das Gleichungssystem in Matrizenform so schreiben:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und dieses Gleichungssystem lässt sich mit $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ auflösen. Praktischerweise ist $\mathbf{A}^{-1}$ bereits gegeben. Somit können wir auflösen:

$$\begin{array}{rrr|r} & & & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 1 \\ \hline 7 & -3 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Die Lösung lautet also: $\boxed{x = -2,\ y = 0,\ z = 1}$

Um sie zu überprüfen, setzen wir ein:

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= -2 + 0 + 3 = 1 \\ x + 3y + 4z &= -2 + 0 + 4 = 2 \\ x + 4y + 3z &= -2 + 0 + 3 = 1 \end{aligned}$$