49
Geben Sie die Ableitung der Funktion $y = \frac{x^{100}}{100}$ an.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{100}x^{100}\right) = 100 \cdot \frac{1}{100}x^{99} = \underline{\underline{x^{99}}}$$

50
Welche Werte müssen in der Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1000$$

die Konstanten a, b und c haben, wenn die abgeleitete Funktion lautet:

$$f'(x) = 30x^2 + x$$

Leiten wir einmal $f(x)$ ab:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Damit ist aber

$$\begin{aligned} 3a &= 30 \\ a &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b &= 1 \\ b &= 0,5 \end{aligned}$$

$$c = 0$$

und die Funktion lautet: $\boxed{f(x) = 10x^3 + 0,5x^2 + 1000}$

Zur Überprüfung leiten wir sie noch ab:

$$f'(x) = 3 \cdot 10x^2 + 2 \cdot 0,5x + 0 = \underline{\underline{30x^2 + x}}$$

51
Geben Sie zunächst mit Hilfe der Produktregel (Seite 96) die Ableitung der Funktion

$$h(x) = \left(x^3 - x\right)\left(5x^4 + x^2\right)$$

an. Multiplizieren Sie anschließend die Klammern (der Ausgangsfunktion) aus und leiten Sie das erhaltene Polynom ab.
Vergleichen Sie die beiden Lösungswege.

$$\begin{aligned} &h'(x) = f'g + fg' = \\ &\left(3x^2 - 1\right)\left(5x^4 + x^2\right) + \left(x^3 - x\right)\left(20x^3 + 2x\right) = \\ &15x^6 - 5x^4 + 3x^4 - x^2 + 20x^6 - 20x^4 + 2x^4 - 2x^2 = \\ &\underline{\underline{35x^6 - 20x^4 - 3x^2}} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$h(x) = \left(x^3 - x\right)\left(5x^4 + x^2\right) =$$
$$5x^7 - 5x^5 + x^5 - x^3 =$$
$$5x^7 - 4x^5 - x^3$$

und das abgeleitet:

$$h'(x) = \underline{\underline{35x^6 - 20x^4 - 3x^2}}$$

Wir erhalten also zweimal dieselbe Lösung – offenbar haben wir die Produktregel richtig angewandt ☺

52
Wie lautet die zweite Ableitung der Funktion

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Im Grunde müssen wir «nur» zweimal die Produktregel anwenden: Die erste Ableitung kennen wir schon:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Das müssen wir jetzt noch einmal ableiten:

$$\tfrac{d}{dx}\left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) =$$
$$f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) =$$
$$\underline{\underline{f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)}}$$