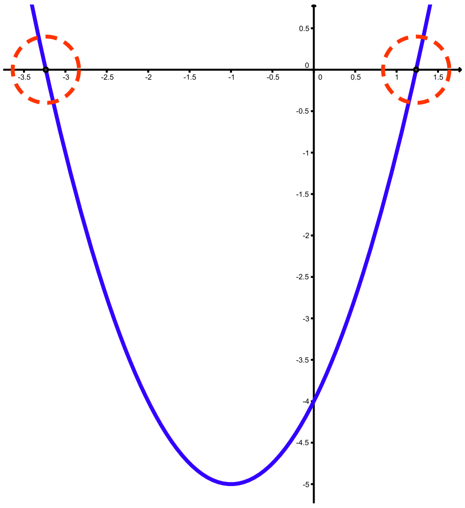
43

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) : y = x^2 + 2x - 4$ (unter Zuhilfenahme von *GeoGebra*) und schätzen sie aus dieser Darstellung die Nullstellen der Funktion.



In der Darstellung des Funktionsgraphen links sehen wir, dass die Funktion die x-Achse einmal zwischen -3.5 und -3 schneidet, und dann nocheinmal zwischen 1 and 1.5. Wir können als Schätzwert für die Nullstellen daher $\boxed{x_1 \approx -3.25}$ und $\boxed{x_2 \approx 1.25}$ angeben.

44

(a) Geben Sie die Gleichungen (Hauptform) der Geraden an, die durch die Punkte $(1, 1)$ und $(-5, -3)$ geht.

Eine Gerade in Hauptform ist durch $y = kx + d$ gegeben. In diese Gleichung können wir jeweils die x- und y-Koordinaten der gegebenen beiden Punkte einsetzen und erhalten ein Gleichungssystem in den beiden Unbekannten k und d:

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & = & 1k & + & d \\ -3 & = & -5k & + & d \\ \hline 4 & = & 6k & & \end{array}$$

daraus:

$$k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

und weiter:

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{2}{3} \cdot 1 + d \\ d &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

und somit die Geradengleichung: $\boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$

Wir können noch überprüfen, ob wirklich beide gegebenen Punkte auf der Geraden liegen:

$$y = \tfrac{2}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} = \underline{\underline{1}}$$
$$y = \tfrac{2}{3} \cdot (-5) + \tfrac{1}{3} = -\tfrac{9}{3} = \underline{\underline{-3}}$$

(b) Geben Sie die Gleichungen der Geraden an, die durch $(-1, 2)$ geht und einen Anstieg von $k = -2$ hat.

Hier ist k bereits gegeben, es fehlt noch d. Wenn die Gerade durch den Punkt $(-1, 2)$ geht, können wir aber einsetzen:

$$2 = (-2)(-1) + d$$
$$2 = 2 + d$$
$$d = 0$$

und erhalten: $\boxed{y = -2x}$

Zur Probe setzen wir noch den Punkt ein:

$$y = -2(-1) = \underline{\underline{2}}$$

45
Wandeln Sie die folgenden implizit gegebenen Geradengleichungen in ihre Hauptform um:
(a) $3x + 18y = 15$, (b) $-13x + 7y = 11$, (c) $x + y = 0$

(a)

$$3x + 18y = 15$$
$$18y = -3x + 15$$
$$y = -\tfrac{3}{18}x + \tfrac{15}{18} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{6}x + \tfrac{5}{6}}}$$

(b)

$$-13x + 7y = 11$$
$$7y = 13x + 11$$
$$\underline{\underline{y = \tfrac{13}{7}x + \tfrac{11}{7}}}$$

(c)

$$x + y = 0$$
$$\underline{\underline{y = -x}}$$

46
Eine Gerade schneidet die x-Achse an der Stelle $(5,0)$ und die y-Achse an der Stelle $(0,3)$. Wie lautet die Geradengleichung?

Wir können wieder zwei Gleichungen aufstellen, und daraus die beiden Unbekannten k und d berechnen. Zunächst einmal setzen wir den Punkt $(0,3)$ ein:

$$0k + d = 3$$
$$d = 3$$

Damit haben wir bereits d. Einsetzen von Punkt $(5,0)$:

$$5k + 3 = 0$$
$$5k = -3$$
$$k = -\tfrac{3}{5}$$

und somit: $\boxed{y = -\tfrac{3}{5}x + 3}$

Überprüfung:

$$y = -\frac{3}{5} \cdot 5 + 3 = -3 + 3 = \underline{\underline{0}}$$

$$y = -\frac{3}{5} \cdot 0 + 3 = \underline{\underline{3}}$$

47 Wo schneidet die Gerade, die durch die Punkte $(1,3)$ und $(2,5)$ geht, die x-Achse und wo die y-Achse?

Zunächst einmal benötigen wir die Gleichung jener Geraden, die durch die beiden angegebenen Punkte geht. Dazu setzen wir zunächst die beiden Punkte in Formel 6.2 (Seite 86) ein und erhalten k:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

Für d setzen wir einen der beiden Punkte ein:

$$y = kx + d$$
$$3 = 2 \cdot 1 + d$$
$$d = 3 - 2 = 1$$

Wir hätten auch den anderen Punkt nehmen können. Das Ergebnis ist (hoffentlich) dasselbe – immerhin sollen ja beide Punkte auf der Geraden liegen:

$$5 = 2 \cdot 2 + d$$
$$d = 5 - 4 = 1$$

Damit lautet die Gerade also:

$$y = 2x + 1$$

Wenn wir wissen wollen, wo diese Gerade die x-Achse schneidet, müssen wir für $y = 0$ einsetzen (Weil die x-Achse alle Punkte repräsentiert, für die $y = 0$):

$$y = 2x + 1$$

$$\begin{aligned}0 &= 2x + 1\\ 2x &= -1\\ x &= -\tfrac{1}{2} = -0,5\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist also der Punkt $\underline{\underline{(-0,5|0)}}$.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist noch leichter, weil der Achsenabschnitt d ja laut Definition bereits genau jener Wert ist, wo die Gerade die y-Achse schneidet. Um nocheinmal zu überprüfen, ob wir richtig gerechnet haben, können wir natürlich auch hier einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}y &= 2 \cdot 0 + 1\\ y &= 1\end{aligned}$$

also – wie erhofft – unser d.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also der Punkt $\underline{\underline{(0|1)}}$.

Hinweis: Auf Seite 84 ist unsere Gerade «zufällig» abgebildet und wir können sehen, dass wir richtig gerechnet haben ☺.

48 Gegeben sind die beiden Geraden:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 4\\ 3x + 5y &= 7\end{aligned}$$

Wie lautet der Schnittpunkt dieser beiden Geraden (= welcher Punkt im Koordinatensystem liegt auf beiden Geraden)?

Um den Schnittpunkt der beiden Geraden anzugeben, suchen wir jenen Wert für x und y, der beide Gleichungen erfüllt. Der so erhaltene Punkt liegt auf beiden Geraden – und das ist der gesuchte Schnittpunkt. Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 4\\ 3x + 5y &= 7\end{aligned}$$

auflösen.

Wie man Gleichungssysteme auflöst, haben wir ab Seite 60 anhand des Gleichungssystems 4.18 gesehen. Das war freundlicherweise genau das Gleichungssystem, das wir jetzt in diesem Beispiel brauchen. Wir erhielten dort als Lösungspaar $x = -1$ und $y = 2$, das beide Gleichungen des Systems 4.18 erfüllt. Also können wir angeben:

Der Schnittpunkt der beiden Geraden lautet $\underline{\underline{S\left(-1|2\right)}}$.