22

In einem Mathematikkurs befinden sich Genies (g), Streber (s), Chaoten (c) und Durchschnittsmathematiker (d). Insgesamt gibt es 120 Teilnehmer, die sich konkret wie folgt aufteilen:

1. Es gibt 50 Prozent mehr Durchschnittsmathematiker als Chaoten.
2. Genies und Streber ergeben zusammen gerade mal soviel wie die Differenz zwischen Durchschnittsmathematikern und Chaoten.
3. Es gibt dreimal soviel Streber wie Genies.

Formulieren Sie jeden dieser drei Punkte als Gleichung in den unbekannten Variablen g, s, c und d:

$$1,5 \cdot c = d$$
$$g + s = d - c$$
$$3 \cdot g = s$$

23

Janne Sven-Ake Holmen ist ein finnischer Langstreckenläufer und hält den nationalen finnischen Rekord im Marathonlauf. Für die 42.195 Kilometer benötigte er 2008 ganze 2 Stunden 10 Minuten und 46 Sekunden.

Im alten Finnland gab es die Geschwindigkeitseinheit *poronkusemaa kuukaudessa*. Dabei bedeutet *kuukaudessa* «pro Monat» und 1 *poronkusemaa* beträgt in SI-Einheiten umgerechnet 7.5 km.

Unter der (mathematischen) Annahme, dass ein Monat aus 30 Tagen besteht: Mit welcher Geschwindigkeit lief Holmen den Marathon, gemessen in «poronkusemaa kuukaudessa»?

Zunächst rechnen wir einmal die Geschwindigkeit aus, mit der Janne Holmen die Marathondistanz durchläuft. Dabei berücksichtigen wir, dass $2h\ 10min\ 46s = [2 + (10/60) + (46/3600)]\ h = 2,1794\ h$, und somit:

$$v = \frac{42,195}{2,1794} = 19,3604\ km/h$$

Wenn er $19,3604\ km$ pro Stunde läuft, entspricht das $19,3604 \cdot 24 \cdot 30 = 13939,5157\ km$ pro Monat. Das sind

$\frac{13939,5157}{7,5} = \boxed{1858,602 \text{ poronkusemaa kuukaudessa}}$

24
Vereinfache den Term

$$\frac{3ab+5a}{4a-ac} = \frac{a\,(3b+5)}{a\,(4-c)} = \underline{\underline{\frac{3b+5}{4-c}}}$$

25
Vereinfache den Term

$$\frac{x^2-16}{3x^2-24x+48} = \frac{(x+4)\,(x-4)}{3\,(x^2-8x+16)} = \frac{(x+4)\,\cancel{(x-4)}}{3\,(x-4)^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\frac{x+4}{3\,(x-4)}}}$$

26
Führen Sie eine Faktorenzerlegung der folgenden Terme aus:

(a) $a^2+4ab+4b^2 = \boxed{(a+2b)\,(a+2b)}$

(b) $-\frac{1}{5}x^2+2xy-5y^2 = -\frac{1}{5}\left(x^2-10xy+25y^2\right) = \boxed{-\frac{1}{5}\,(x-5y)\,(x-5y))}$

27
Gegeben seien zwei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Das Dreifache der ersten Zahl ergibt um 5 mehr als das Doppelte der zweiten Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen?

$(2x-1)$ und $(2x+1)$ sind zwei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Damit ist

$$3\,(2x-1) = 2\,(2x+1)+5$$
$$6x-3 = 4x+7$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

und die zwei gesuchten ungeraden Zahlen sind

$$(2x-1) = \boxed{9} \text{ und } (2x+1) = \boxed{11}$$

Wir können noch überprüfen:

$$3\cdot 9 = 2\cdot 11+5$$
$$27 = 22+5 = 27$$

28
Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf (und überprüfen Sie Ihre Lösung):

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{8}{6}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{4x-6}{12} = \tfrac{9x-16}{12} \\
&4x - 6 = 9x - 16 \\
&10 = 5x \\
&\underline{\underline{x = 2}}
\end{aligned}$$

Zur Überprüfung setzen wir ins ursprüngliche System ein:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1\cdot 2}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3\cdot 2}{4} - \tfrac{8}{6} \\
&\tfrac{4-3}{6} = \tfrac{36-32}{24} \\
&\tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{24}
\end{aligned}$$

29
Lösen Sie das in Aufgabe 22 aufgestellte Gleichungssystem auf.

In Aufgabe 22 haben wir drei Gleichungen aufgestellt. Nachdem es aber vier Unbekannte gibt, fehlt offenbar noch eine Gleichung. Und die entnehmen wir der Angabe: «Insgesamt gibt es 120 Teilnehmer». Die anderen Gleichungen können wir aus 22 übernehmen und ein wenig umschreiben:

$$\begin{array}{rccccccccc}
I: & g & + & s & + & c & + & d & = & 120 \\
II: & & & & & 1,5c & - & d & = & 0 \\
III: & g & + & s & + & c & - & d & = & 0 \\
IV: & 3g & - & s & & & & & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc}
I+II: & g & + & s & + & 2,5c & = & 120 \\
5(III-II): & 5g & + & 5s & - & 2,5c & = & 0 \\
\hline
V: & 6g & + & 6s & & & = & 120
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc}
V: & 6g & + & 6s & = & 120 \\
6IV: & 18g & - & 6s & = & 0 \\
\hline
 & 24g & & & = & 120 \\
 & g & & & = & 5
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&15 - s = 0 \\
&s = 15
\end{aligned}$$

$5 + 15 = 0,5c$
$20 = 0,5c$
$c = 40$

$5 + 15 + 40 + d = 120$
$60 + d = 120$
$d = 60$

Es gibt somit
$\boxed{\text{5 Genies, 15 Streber, 40 Chaoten und 60 Durchschnittsmathematiker}}$

30

Walter Mayer, Bernhard Kohl und Anna Bolika trainieren für eine Radtour durch France, sind dabei aber unterschiedlich ausdauernd: Gestern fuhr Bernhard 1 Stunde länger als Walter, und zwar mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit, die $5\,km/h$ schneller war als die von Walter. Anna hingegen fuhr sogar 2 Stunden länger als Walter und erreichte eine um $10\,km/h$ schnellere Geschwindigkeit als Walter. Bernhard fuhr 70 Kilometer weiter als Walter.
Um wieviele Kilometer fuhr Anna Bolika weiter als Walter Mayer?

Schreiben wir einmal auf, was wir kennen:

	Walter	Bernhard	Anna
Geschwindigkeit:	v	$v+5$	$v+10$
Zeit:	t	$t+1$	$t+2$
Entfernung:	$(v \cdot t)$	$(v+5) \cdot (t+1)$	$(v+10) \cdot (t+2)$

Bernhard fuhr $70\,km$ weiter als Walter, daher können wir folgende Gleichung aufschreiben:
$vt + 70 = (v+5)(t+1)$
bzw. daraus folgern: $5t + v + 5 = 70$

Anna fuhr $(v+10)(t+2)\,km$ weit; durch Ausmultiplizieren erhalten wir:
$(v+10)(t+2) = vt + 10t + 2v + 20$
Das können wir umformen zu
$vt + 10t + 2v + 20 = vt + 2(5t + v + 5) + 10$
Der Ausdruck in der Klammer kommt schon oben vor, und daher können wir ihn hier einsetzen und weiter vereinfachen:
$vt + 2(5t + v + 5) + 10 = vt + 2 \cdot 70 + 10 = vt + 150$

Anna Bolikas Ausdauer reichte also für $\boxed{150}$ Kilometer mehr.

31

Geben Sie eine allgemeine Lösung für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

an.

Im Grunde gehen wir genauso vor, wie auch sonst beim Auflösen von Gleichungssystemen durch Elimination. Nur dass wir anstelle von Zahlen a, b, c, d, e und f stehen haben:

Zunächst multiplizieren wir die erste Gleichung mit e und die zweite mit $-b$:

$$\begin{array}{rcrcr} aex & + & bey & = & ce \\ -bdx & - & bey & = & -bf \\ \hline (ae - bd)\,x & & & = & ce - bf \end{array}$$

Damit können wir x angeben:

$$\boxed{x = \frac{ce-bf}{ae-bd}}$$

Für y gehen wir ähnlich vor und multiplizieren die erste Gleichung mit $-d$ und die zweite mit a:

$$\begin{array}{rcrcr} -adx & - & bdy & = & -cd \\ adx & + & aey & = & af \\ \hline & & (ae - bd)\,y & = & af - cd \end{array}$$

und erhalten:

$$\boxed{y = \frac{af-cd}{ae-bd}}$$

32

Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a)

$$\begin{array}{rcl} 6 - x^2 & < & 0 \\ \left(\sqrt{6} - x\right)\left(\sqrt{6} + x\right) & < & 0 \end{array}$$

Das ist dann der Fall, wenn entweder $\left(\sqrt{6} - x\right) > 0$ und $\left(\sqrt{6} + x\right) < 0$ oder wenn $\left(\sqrt{6} - x\right) < 0$ und $\left(\sqrt{6} + x\right) > 0$.

Die Lösung ist daher insgesamt: $\boxed{x < -\sqrt{6} \text{ oder } x > \sqrt{6}}$

(b) Fall 1: $x-4>0$ bzw. $x>4$

$$\frac{-4}{x-4} < x$$
$$-4 < x\,(x-4)$$
$$0 < x^2 - 4x + 4$$
$$0 < (x-2)^2$$

$(x-2)^2$ ist aber immer größer als Null, daher ist die Voraussetzung für Fall 1 bereits die Lösungsmenge: $\boxed{x>4}$

Fall 2: $x-4<0$ bzw. $x<4$

$$\frac{-4}{x-4} < x$$
$$-4 > x\,(x-4)$$
$$0 > x^2 - 4x + 4$$
$$0 > (x-2)^2$$

das kann aber nie der Fall sein. Daher liefert der 2. Fall keine weitere Lösung.

33

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a)

$$3x^2 + 2x + 2 < 2x^2 + x + 4$$
$$x^2 + x - 2 < 0$$
$$(x+2)\,(x-1) < 0$$

Fall 1: $(x+2) < 0$ und $(x-1) > 0$ bzw. $x < -2$ und $x > 1$, was aber keine Lösung liefert.

Fall 2: $(x+2) > 0$ und $(x-1) < 0$ bzw. $x > -2$ und $x < 1$, was man auch so schreibt:

$$\underline{\underline{-2 < x < 1}}$$

(b) $(x+5)\,(x-1)\,(x-2) < 0$

Fall 1:

$$x+5>0 \quad x-1>0 \quad x-2<0$$
$$x>-5 \quad x>1 \quad x<2$$
$$\underline{\underline{1<x<2}}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}&x+5>0 \quad \text{und} \quad x-1<0 \quad \text{und} \quad x-2>0\\&x>-5 \quad \text{und} \quad x<1 \quad \text{und} \quad x>2\\&L=\{\ \}\end{aligned}$$

Fall 3:

$$\begin{aligned}&x+5<0 \quad \text{und} \quad x-1>0 \quad \text{und} \quad x-2>0\\&x<-5 \quad \text{und} \quad x>1 \quad \text{und} \quad x>2\\&L=\{\ \}\end{aligned}$$

Fall 4:

$$\begin{aligned}&x+5<0 \quad \text{und} \quad x-1<0 \quad \text{und} \quad x-2<0\\&x<-5 \quad \text{und} \quad x<1 \quad \text{und} \quad x<2\\&\underline{\underline{x<-5}}\end{aligned}$$

D.h. x muss entweder kleiner als -5 sein oder zwischen 1 und 2 liegen, damit die Ungleichung erfüllt ist.

34

Eine Telefongesellschaft bietet zwei Handy-Tarife an: Tarif 1 beträgt 16 € Grundgebühr (monatlich) plus 0,30 € pro Minute Gesprächsgebühr, oder Tarif 2 (Prepaid Wertkarte) ohne Grundgebühr mit 0,40 € pro Minute. Bis zu wieviel Minuten monatlichen Telefonierens ist das Wertkartentelefon günstiger als Tarif 1?

$$\begin{aligned}&0,4x < 16+0,3x\\&0,1x < 16\\&x < 160\end{aligned}$$

d.h. $\underline{\underline{\text{bis 160 Minuten}}}$ monatlicher Gesprächsdauer ist das Wertkartentelefon günstiger.

35

Eine Telefongesellschaft bietet zwei Handy-Tarife an: Tarif 1 beträgt 16 € Grundgebühr (monatlich) plus 0,30 € pro Minute Gesprächsgebühr, oder Tarif 2 (Prepaid Wertkarte) ohne Grundgebühr mit 0,40 € pro Minute. Tarif 1 beinhaltet auch 1000 Freiminuten pro Monat. Bis zu wieviel Minuten monatlichen Telefonierens ist das Wertkartentelefon günstiger als Tarif 1?

Die 1000 Freiminuten würden beim Wertkartenhandy 400 € entsprechen, also weit über den 16 € liegen. Offenbar geht es also um eine Anzahl an Minuten, die weit unter den 1000 Minuten liegt. D.h. aber auch, dass wir den Tarif 2 immer nur gegen die 16 € vergleichen müssen.

$$0,4x < 16$$
$$x < 16/0,4$$
$$x < 40$$

d.h. bei weniger als 40 Minuten monatlicher Gesprächsdauer ist das Wertkartentelefon günstiger.

36 Auf Seite 1 dieses Skriptums wurde behauptet, dass folgendes gilt: Bilden wir die Differenz zwischen einer dreistelligen Zahl und ihrer «Spiegelzahl» und zählen wir zu dieser Differenz anschließend die Spiegelzahl der Differenz dazu, erhalten wir *immer* 1089 als Ergebnis. Können Sie die Vorgangsweise mit Hilfe von Gleichungen formalisieren und damit die 1089 «beweisen»?

Für die Lösung: Siehe Einleitungsvideo im Online Kurs zu MT100. Dort ist dieser Beweis angegeben.

37 Unter www.cookingcatrin.at/matcha-cheesecake-mit-beeren finden Sie ein Rezept für einen *Cheesecake mit Beeren*, das auf die Verwendung einer Springform mit 20 cm Durchmesser ausgelegt ist. Wenn Sie diesen Kuchen in einer 30cm-Form backen wollen, müssen Sie eine entsprechend größere Menge an Zutaten verwenden. Mit welchem Faktor x müssen Sie die angegebenen Mengen jeweils multiplizieren, um einen Kuchen mit 30 cm Durchmesser zu erhalten?

Hinweis: Wir nehmen an, wenn wir alle Mengen jeweils mit dem Faktor x multiplizieren, wird der Kuchen ein um diesen Faktor x größeres Volumen haben. Und weiters: Eine Tortenform ist mathematisch gesehen ein Kreiszylinder mit dem Volumen

$$V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi h$$

Auf die Schnelle könnte man ja annehmen, dass man von allen Zutaten die eineinhalbfache Menge nehmen muss, weil ja auch $24 \cdot 1.5 = 30$ ergibt. Vermutlich wird dieser Kuchen aber sehr flach ausfallen, weil wir ja nicht nur eine größere Grundfläche haben, sondern – wenn die Höhe im Vergleich zum Originalrezept gleich sein soll – auch ein größeres Volumen brauchen.

Das Volumen des 30er-Kuchens ist um den Faktor x größer als das Volumen des 20er-Kuchens, also:

$$V_{30} = x \cdot V_{20}$$

und daher:

$$\left(\frac{30}{2}\right)^2 \pi h = x \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \pi h$$

π und h können wir auf beiden Seiten rauskürzen und es bleibt:

$$15^2 = x \cdot 10^2$$

woraus wir leicht x ausrechnen können:

$$x = \frac{15^2}{10^2} = \frac{225}{100} = \underline{\underline{2,25}}$$

Wir müssen also von jeder Zutat die 2,25-fache Menge verwenden.