13
Die neun Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 und 999 sind alle durch 1, 3, und 111 ohne Rest teilbar. Durch welche natürliche Zahl noch?

Dividieren wir 111 durch 3, so erhalten wir 37. Daher sind Zahlen, die durch 111 *und* 3 teilbar sind, auch durch $\boxed{37}$ teilbar.

Wir überprüfen das noch zur Sicherheit:

$$\begin{array}{ccc} 111 = 3 \times 37 & 222 = 2 \times 3 \times 37 & 333 = 3^2 \times 37 \\ 444 = 2^2 \times 3 \times 37 & 555 = 3 \times 5 \times 37 & 666 = 2 \times 3^2 \times 37 \\ 777 = 3 \times 7 \times 37 & 888 = 2^3 \times 3 \times 37 & 999 = 3^3 \times 37 \end{array}$$

14
Suchen Sie in Ihrer Geldbörse einen Euroschein und notieren Sie dessen Seriennummer. Ersetzen Sie die Buchstaben am Anfang der Seriennummer jeweils durch die Zahl, die ihrem ASCII-Code entspricht. Sie erhalten dann eine 13 oder 14-stellige Zahl (je nachdem, ob Ihre Seriennummer mit einem oder zwei Buchstaben begonnen hat). Bilden Sie die iterierte Quersumme dieser Zahl. Wenn sie nicht 9 ist, haben Sie sich entweder verrechnet, oder einen falschen Geldschein vor sich …

Nehmen wir zum Beispiel: `X78778190576`. Der ASCII-Code für `X` ist 88, die Prüfzahl daher 8878778190576. Dessen Quersumme ist

$$8 + 8 + 7 + 8 + 7 + 7 + 8 + 1 + 9 + 0 + 5 + 7 + 6 = 81$$

und davon die Quersumme tatsächlich $8 + 1 = \boxed{9}$.

15
Überprüfen Sie anhand der auf Seite 28 angegebenen Teilbarkeitsregeln, durch welche ganze Zahlen ≤ 25 die Zahl 172 800 teilbar ist.

Von den angegebenen Teilbarkeitsregeln sind jene für $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ und 25 erfüllt. Dazu kommen noch einige weitere ganze Zahlen, die wir aus möglichen Kombinationen davon bilden können:

- ▷ Wenn 172 800 durch 2 *und* 6 teilbar ist, dann ist es auch durch 12 teilbar.
- ▷ Wenn es durch 3 *und* 5 teilbar ist, dann ist es auch durch 15 teilbar.
- ▷ Wenn es durch 2 *und* 8 teilbar ist, dann ist es auch durch 16 teilbar.
- ▷ Wenn es durch 2 *und* 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 18 teilbar.
- ▷ Wenn es durch 2 *und* 10 teilbar ist, dann ist es auch durch 20 teilbar.
- ▷ Wenn es durch 2 *und* 12 teilbar ist, dann ist es auch durch 24 teilbar.

Damit ist die Menge alle Teiler von 172 800:

$\boxed{\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25\}}$

16
Führen Sie für folgende Zahlen jeweils eine Primfaktorenzerlegung durch:
(a) Die Anzahl der Stunden an einem Tag
(b) Die Anzahl der Minuten an einem Tag
(c) Die Anzahl der Sekunden an einem Tag

Ein Tag hat 24 Stunden, 24×60 Minuten und $24 \times 60 \times 60$ Sekunden. Die genaue Anzahl müssen wir uns aber gar nicht ausrechnen, weil ja nur die Primfaktorenzerlegung gefragt ist. Dafür reicht die Zerlegung von 24 und 60:
$24 = 2^3 \cdot 3$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
und daher:

(a) Anzahl der Stunden an einem Tag $= 2^3 \cdot 3$

(b) Anzahl der Minuten an einem Tag $= 2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$

(c) Anzahl der Sekunden an einem Tag $= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

17
Welches ist die größte ganze Zahl $\leq 100\,000\,000$, die durch $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9 teilbar ist?

Das *kgV* von $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9 ist $2^3 + 3^2 + 5^1 + 7^1 = 2520$. Eine Zahl, die durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9 teilbar ist, muss daher ein Vielfaches von 2520 sein.

Wenn wir 100 000 000 durch 2520 dividieren, erhalten wir $39682,5$. Wir suchen aber nur ganze Zahlen. Die größte ganze Zahl, die durch $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9 teilbar ist, ist dann $39682 \times 2520 = \boxed{99\,998\,640}$

(Die nächste Zahl, auf die die Teilbarkeit durch $1 - 9$ zutrifft, wäre dann um 2520 größer, aber das ist schon größer als 100 000 000).

18
Bringen Sie die folgenden neun Quotienten in eine aufsteigende Reihenfolge,

d.h. der Quotient mit dem kleinsten Zahlenwert steht ganz links, dann der mit dem nächstgrößeren Wert und so fort:

$$\frac{111+1}{1+1}, \frac{222+2}{2+2}, \frac{333+3}{3+3}, \frac{444+4}{4+4}, \frac{555+5}{5+5}, \frac{666+6}{6+6}, \frac{777+7}{7+7}, \frac{888+8}{8+8}, \frac{999+9}{9+9}$$

Jeder dieser Brüche hat die Form

$$\frac{100n + 10n + n + n}{n + n}$$

und ist durch n kürzbar. Es verbleibt dann

$$\frac{100 + 10 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{112}{2} = 56$$

Somit sind alle Quotienten gleich groß und man braucht/kann sie nicht mehr speziell umordnen, um sie der Größe nach zu sortieren.

(Wem die Form $\frac{100n+10n+n+n}{n+n}$ zu kompliziert ist oder wer «nie» alleine darauf gekommen wäre, der oder die kann natürlich auch einfach alle Quotienten der Reihe nach ausrechnen. Spätestens nachdem zum fünften Mal 56 herauskommt, schöpft man vermutlich irgendeinen Verdacht...).

19
Geben Sie die Summe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$$

an.

Um die Summe (ohne Zuhilfenahme eines Rechners) angeben zu können, müssen wir alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

Entweder wir multiplizieren dazu alle vorkommenden Nenner miteinander, was aber zu sehr großen Zahlen führen würde. Oder wir bestimmen das kgV aller Nenner mittels Primfaktorenzerlegung, was mitunter (zeit-)aufwändig sein kann. In der Praxis könnten wir auch zunächst ausprobieren, ob nicht vielleicht der größte vorkommende Nenner (5040) ohnehin bereits das kgV ist, sprich: Ob nicht alle anderen Nenner Teiler von 5040 sind:

$$5040 \div 2 = 2520$$
$$5040 \div 6 = 840$$
$$5040 \div 24 = 210$$
$$5040 \div 120 = 42$$
$$5040 \div 720 = 7$$

Oups - Glück gehabt! Damit können wir gleich weiterrechnen:

$$\frac{5040+5040+2520+840+210+42+7+1}{5040} = \frac{13700}{5040} = \boxed{\frac{685}{252}}$$

20
Lösen Sie die folgenden Doppelbrüche auf:

$$(a) \quad \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(b) \quad \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

21
Setzen Sie für $x = 3/7$ und für $y = 1/14$ ein und bringen Sie den folgenden Bruch auf eine möglichst einfache Form (= einen Quotienten ohne Doppelbruch und durch den größten gemeinsamen Teiler gekürzt):

$$\frac{13\,(2x - 3y)}{2x + 1}$$

$$\frac{13\left(2 \cdot \frac{3}{7} - 3 \cdot \frac{1}{14}\right)}{2 \cdot \frac{3}{7} + 1} = \frac{13\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 - 3}{14}\right)}{\left(\frac{2 \cdot 3 + 7}{7}\right)} = \frac{117}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{\cancel{117}\,9}{\cancel{14}\,2} \cdot \frac{\cancel{7}\,1}{\cancel{13}\,1} = \frac{9}{2}$$