A Lösungen zu den Aufgaben

1
Ungerade Zahlen lassen sich laut Formel 2.3 in der Form $n = 2k + 1$ darstellen. Wie sieht diese Darstellung konkret für die ungerade Zahl -23 aus? Wie groß ist dabei k?

Wenn $2k + 1$ gleich -23 sein soll, dann ist $2k$ gleich -24 und $\underline{\underline{k = -12}}$.

2
Warum kann es außer der Zahl 2 keine andere gerade Primzahl geben?

Jede gerade Zahl ungleich 2 ist – außer durch 1 und sich selbst – mindestens auch durch 2 teilbar. (Sonst wäre es keine gerade Zahl). Das steht aber im Widerspruch zur Definition einer Primzahl.

3
(Angabe siehe Beispiel 6). Wann wäre Paula schneller? Wenn sie ihre Geschwindigkeit um 5% verbessert, oder wenn sie ihre Zeit um 5% verbessert?

Paula läuft $2,2569$ Stunden lang mit einer Geschwindigkeit von $18,6957\ km/h$, also beträgt die Streckenlänge

$$s = 18,6957 \cdot 2,2569 = 42,1950\ km$$

Wenn Paula ihre Geschwindigkeit um 5% verbessert, läuft sie diese Strecke mit einer Geschwindigkeit von

$$v = 18,6957 \cdot 1,05 = 19,6304\ km/h$$

und benötigt für die Gesamtstrecke

$$t = 42{,}1950/19{,}6304 = 2{,}1495\ h = 2\ h\ 08\ min\ 58\ sek$$

Wenn sie hingegen ihre ursprüngliche Zeit um 5% verbessern würde, bräuchte sie nur

$$2{,}2569 \cdot 0{,}95 = 2{,}1441\ h = 2\ h\ 08\ min\ 39\ sek$$

was um 19 *sek* schneller ist.

Man kann die Lösung auch mit der Geschwindigkeit argumentieren:

Verbessert Paula ihre ursprüngliche Geschwindigkeit um 5%, dann läuft sie mit

$$v = 18{,}6957 \cdot 1{,}05 = 19{,}6304\ km/h$$

Verbessert sie hingegen die Zeit um 5%, dann benötigt sie nur noch

$$2{,}2569 \cdot 0{,}95 = 2{,}1441\ h$$

und durchläuft die Gesamtstrecke von $42{,}1950\ km$ daher mit einer Geschwindigkeit von

$$v = 42{,}1950 \div 2{,}1441 = 19{,}6796\ km/h$$

also um $0{,}05\ km/h$ schneller.

4

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an:

$(\times)$ $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}$

$(\ \ )$ $\frac{5}{7} \neq \frac{5+3}{7+3} = \frac{8}{10}$

$(\times)$ $\frac{5}{7} = \frac{-5 \cdot 2{,}5}{-7 \cdot 2{,}5} = \frac{-12{,}5}{-17{,}5}$

5

Kann das Quadrat einer Primzahl wieder eine Primzahl sein?

Nein. Wenn a eine Primzahl ist, dann ist das Quadrat gleich $a \cdot a$, und das ist durch 1 und das Produkt aa teilbar, aber auch durch die ursprüngliche Ausgangszahl a. Zum Beispiel ist $13^2 = 169$ und das ist durch 1, 169 und 13 teilbar, also nicht nur durch sich selbst (169) und durch 1 (was die Definition einer Primzahl wäre).

6
Setzen Sie jeweils zwischen die beiden Terme {in geschwungener Klammer} das richtige Zeichen ein ($<, \leq, >, \geq$ oder $=$)

(a)
$|4+(-2)| = 2$
$|-4| + |-2| = 6$
daher ist

$$\{|4+(-2)|\} < \{|-4| + |(-2)|\}$$

(b)
$|4+(-2)| = 2$
$|4| + |-2| = 6$
daher ist

$$\{|4+(-2)|\} < \{|4| + |(-2)|\}$$

(c)
$|4-(-2)| = 6$
$|4| - |-2| = 2$
daher ist

$$\{|4-(-2)|\} > \{|4| - |(-2)|\}$$

7
Berechnen Sie

(a) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)+n}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$
(b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$
(c) $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$
(d) $\frac{1}{n} \div \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

8
Berechnen Sie (*ohne Taschenrechner!*):

$$111\,111\,111 \times 111\,111\,111 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$$

9
Berechnen Sie die folgenden Multiplikationen und Divisionen und ordnen Sie

anschließend die Ergebnisse der Größe nach (beginnend mit dem kleinsten Wert).

(a) $\frac{1}{20} \div \frac{6}{7} = \frac{1 \cdot 7}{20 \cdot 6} = \frac{7}{120}$
(b) $\frac{1}{12} \div \frac{2}{9} = \frac{1 \cdot 9}{12 \cdot 2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$
(c) $\frac{1}{8} \div \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 1} = \frac{3}{8}$
(d) $\frac{1}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{10 \cdot 3} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Um die Ergebnisse der Größe nach ordnen zu können, müssen wir sie auf den gleichen Nenner bringen:

(a) $\frac{7}{120}$
(b) $\frac{3}{8} = \frac{45}{120}$
(c) $\frac{3}{8} = \frac{45}{120}$
(d) $\frac{1}{6} = \frac{20}{120}$

und somit ist die Reihenfolge offensichtlich: (a) $<$ (d) $<$ (b) $=$ (c)

10
Primzahlen sind bekanntlich natürliche Zahlen, die nur durch zwei andere Zahlen teilbar sind, nämlich durch sich selbst und durch 1. Durch wie viele Zahlen ist das Produkt zweier beliebiger (unterschiedlicher) Primzahlen teilbar?

Das Produkt zweier unterschiedlicher Primzahlen ist durch vier Zahlen teilbar: Durch 1, durch das Produkt selbst (= das Ergebnis der Multiplikation) und durch die beiden Primzahlen, aus denen das Produkt gebildet wurde.

11
Der 29.11.2011 war der letzte Tag des Jahres 2011, bei dem Tag (29), Monat (11) und Jahreszahl (2011) und auch die Quersumme des Datums ($2+9+1+1+2+0+1+1=17$) jeweils eine Primzahl ist.

Welches war der *erste* Tag des Jahres 2011, auf den diese mathematische Zufälligkeit zutraf?

Lösung:

Die kleinste Primzahl ist 2, wir suchen also einen Tag im Februar. Der 2. Februar wäre ein Tag, an dem Tag (2), Monat (2) und Jahreszahl (2011) eine Primzahl ist, allerdings ist die Ziffernquersumme $2+2+2+0+1+1 = 8$ und das ist keine Primzahl. Der nächste Primzahl-Tag ist der 3.2.2011 mit der Quersumme 9 (keine Primzahl), dann der 5.2.2011 mit der Ziffernquersumme $5+2+2+0+1+1 = 11$ – hurra, das ist unsere Lösung:

Der 5.2.2011 war der erste Tag des Jahres 2011, an dem Tag, Monat und Jahreszahl und auch die Ziffernquersumme des Datums jeweils eine Primzahl waren.

12

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{(a-b)^2 - c^2}{a-b-c} =$$

(Hinweis: «So weit wie möglich» bedeutet in diesem Beispiel jedenfalls, dass im Term kein Bruch mehr vorkommt).

$$\frac{(a-b)^2 - c^2}{a-b-c} = \frac{(a-b-c)\,(a-b+c)}{(a-b-c)} = \frac{\cancel{(a-b-c)}\,(a-b+c)}{\cancel{(a-b-c)}} = \underline{\underline{a-b+c}}$$

Hinweis: Hier kommt im ersten Schritt Formel 2.54 (S.15) zur Anwendung.